تهیه و انتشار:

امین یارمحمدی (مدرس ریاضیات دانشگاهی)

شماره تماس جهت هماهنگی برای کلاس خصوصی: ۰۹۱۲ ۳۸ ۷۲۸ ۳۴

شعاع همگرایی سری:

شعاع همگرایی سری برابر است با فاصله مرکز همگرایی سری (یعنی عددی که سری توانی حول آن نوشته شده است و اکثراً با x_0 نمایش می‌دهیم) تا نزدیکترین مقدار x که سری به ازای آن واگرا باشد. شعاع همگرایی را معمولاً با R نمایش داده و اگر سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ باشد، R را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{یا} \quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

دقت کنید که در روابط بالا حاصل حد با $\frac{1}{R}$ برابر است. پس برای یافتن R باید جواب را معکوس کنیم. همینطور دقت داشته باشید که a_n ضریب $(x-x_0)^n$ است.

مثال: شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+5}(x-2)^n$ را بیابید.

حل: سری توانی حول $x_0=2$ است زیرا داخل سری $(x-2)^n$ داریم. ضریب $(x-2)^n$ نیز عبارت $\frac{4^n}{n+5}$ است پس $a_n=\frac{4^n}{n+5}$ است. مناسب‌ترین فرمول نیز $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ است زیرا محاسبه ریشه nام $a_n=\frac{4^n}{n+5}$ در ∞ دشوار است. پس داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4^{(n+1)}}{(n+1)+5}}{\frac{4^n}{n+5}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+5).4^{(n+1)}}{(n+6).4^n}\right|=4$$

یعنی شعاع همگرایی $R=\frac{1}{4}$ است.

تمرین: شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{3n-1}}{2^{n+3}}(x+5)^n$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{2^{5n+3}}(x-2)^n$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(-2)^{n-2}\left(n^3+2\right)}$$

فاصله همگرایی: پس از یافتن شعاع همگرایی، فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \rightarrow |x-x_0|<R$$

$$\rightarrow -R<x-x_0<R \rightarrow x_0-R<x<x_0+R$$

که نقاط مرزی یعنی x_0-R و x_0+R باید جداگانه بررسی شوند. به این صورت که این دو عدد را در سری جایگذاری کرده و به کمک آزمونهای بررسی همگرایی سری،

نوع این نقاط از نظر همگرایی یا واگرایی را می‌یابیم. در صورتیکه سری در این نقاط همگرا باشد برای این نقاط از تساوی ($\leq$) نیز استفاده می‌کنیم، در غیر اینصورت فقط نامساوی ($<$) قرار می‌دهیم.

مثال: شعاع همگرایی و فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n}$ را بیابید.

حل: سری توانی حول $x_0 = 0$ است زیرا داخل سری $(x-0)^n$ داریم. ضریب x^n نیز عبارت $\frac{1}{n.2^n}$ است پس $a_n = \frac{1}{n.2^n}$ است. مناسب‌ترین فرمول نیز $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ است زیرا محاسبه ریشه nام $a_n = \frac{1}{n.2^n}$ در ∞ دشوار است.

پس داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1).2^{n+1}}}{\frac{1}{n.2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n.2^n}{(n+1).2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^1}\right| = \frac{1}{2}$$

یعنی $R = 2$

حال برای یافتن فاصله همگرایی داریم:

$$|x-0|<2 \Rightarrow -2<x<2$$

نقاط مرزی یعنی -2 و 2 را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n.2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

که حاصل آن یک سری واگراست (در آموزش سری‌ها اثبات شد) پس $x=2$ جزو فاصله همگرایی نیست.

$$x=-2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n.2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n.2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

که حاصل آن یک سری متناوب است و ۲ شرط همگرایی سری‌های متناوب را دارد، پس همگراست. یعنی $x=-2$ در فاصله همگرایی قرار دارد.

در نتیجه فاصله همگرایی سری فوق عبارت است از: $\boxed{-2\le x<2}$

تمرین: شعاع همگرایی و فاصله همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n.x^n}{n!}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

همگرایی مشروط و همگرایی مطلق: هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد ولی $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگرا باشد، سری همگرایی مشروط دارد ولی اگر هر دو سری فوق همگرا باشند، سری همگرایی مطلق دارد.

مثال: نوع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Ln(n)}{n}$ را بررسی کنید.

حل: سری از نوع متناوب است پس دو شرط همگرایی سری‌های متناوب را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Ln(n)}{n} \overset{HOP}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \\ 2)\ \dfrac{Ln(n+1)}{n+1} < \dfrac{Ln(n)}{n} \rightarrow a_{n+1} < a_n \end{cases}$$

هر دو شرط برقرار است پس سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. نزولی بودن سری را از آزمون مشتق که در آموزش دنباله‌ها توضیح دادیم نیز می‌توانیم بررسی کنیم.

حال همگرایی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ را بررسی می‌کنیم. کافیست $(-1)^n$ را حذف کنیم تا $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ بدست آید زیرا بقیه عبارات به ازای اعداد طبیعی، غیرمنفی هستند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n\, Ln(n)}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln(n)}{n}$$

از آزمون انتگرال کمک می‌گیریم:

$$\int_1^{\infty} \frac{Ln(x)}{x}dx = \left.\frac{\left[Ln(x)\right]^2}{2}\right|_1^{\infty} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\left[Ln(x)\right]^2}{2}\right) - 0 = \infty$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگراست، در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Ln(n)}{n}$ همگرایی مشروط دارد.

تمرین: نوع همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+5}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(Ln(n))^2}$$