تهیه و انتشار:

امین یارمحمدی (مدرس ریاضیات دانشگاهی)

شماره تماس جهت هماهنگی برای کلاس خصوصی: ۰۹۱۲ ۳۸ ۷۲۸ ۳۴

سری تیلور (Taylor Series):

هر تابعی را میتوان حول نقطه‌ای که بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است تبدیل به یک چندجمله‌ای کرد که این چندجمله‌ای را **سری تیلور** می‌نامیم زیرا اولین بار توسط آقای بروک تیلور در سال ۱۷۱۵ ابداع شده است. تبدیل یک تابع مانند $\sin(x)$ به یک چندجمله‌ای، کاربردهای فراوانی در ریاضیات، کامپیوتر، فیزیک و ... دارد. سری تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x = x_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

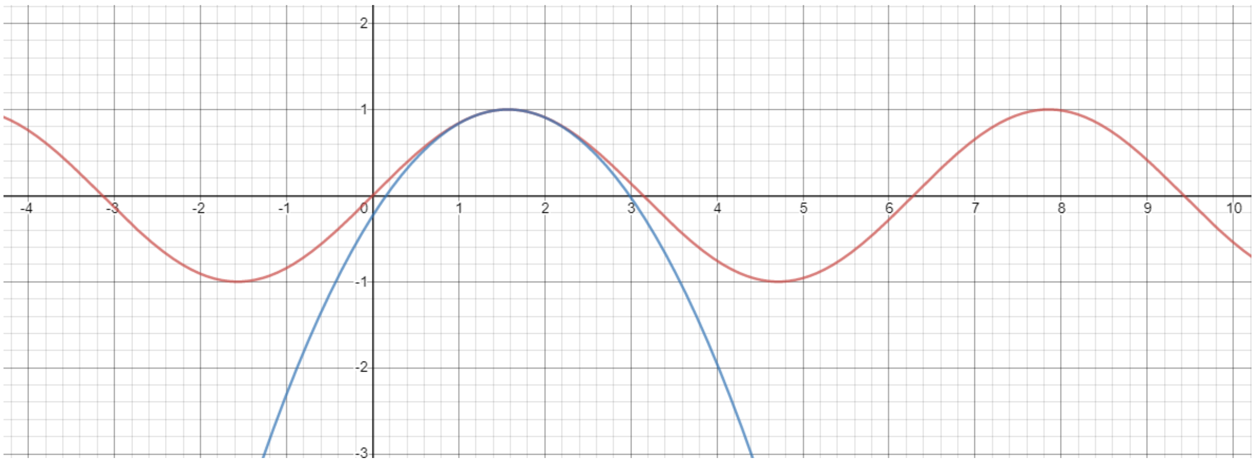
هر چه تعداد جملات چندجمله‌ای بیشتر باشد، جواب به دست آمده از چندجمله‌ای به ازای هر x به مقدار تابع در آن نقطه نزدیکتر می‌شود و اگر تعداد جملات بی‌نهایت باشد

این دو مقدار دقیقاً با یکدیگر برابر می‌شوند. به طور مثال سری تیلور تابع $f(x)=\sin(x)$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ به صورت زیر است:

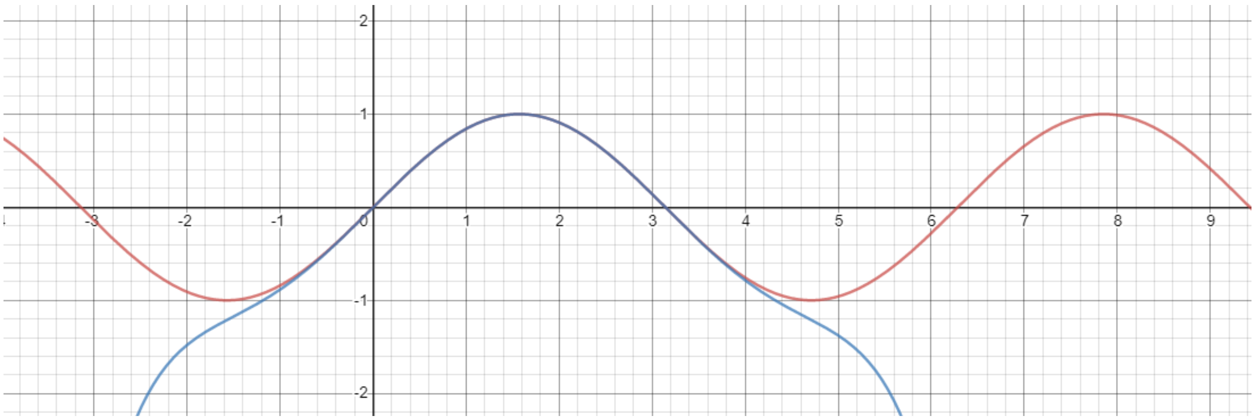
$$\sin(x)=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{720}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6$$

$$+\frac{1}{40320}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^8-\frac{1}{3628800}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{10}+\dots$$

اگر فقط دو جمله اول را در نظر بگیریم، تابع $f(x)=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$ (منحنی آبی شکل زیر) فقط در نقاط نزدیک به نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ با تابع $f(x)=\sin(x)$ (منحنی قرمز شکل زیر) تقریباً برابر است.



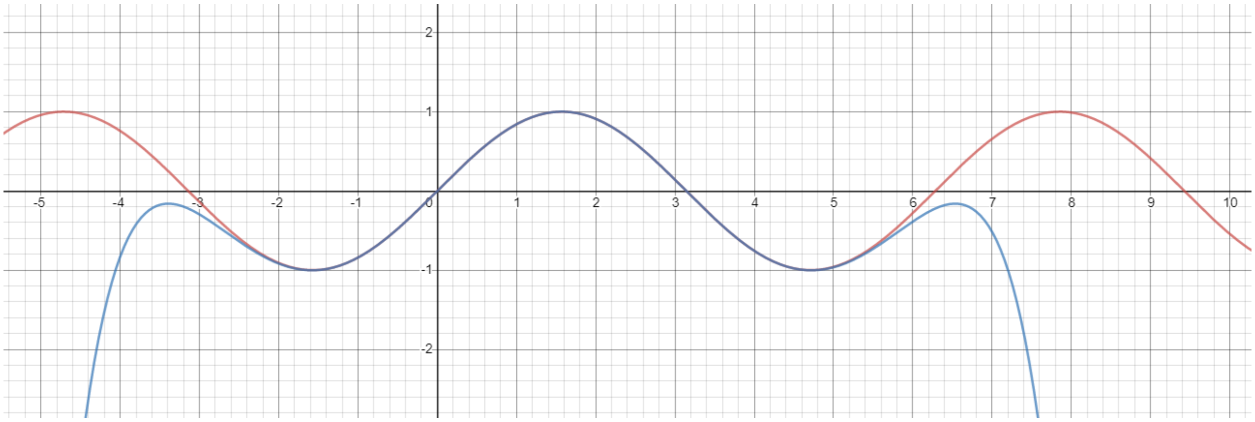
ولی با در نظر گرفتن چهار جمله اول تابع یعنی استفاده از مرتبه ششم سری تیلور، تابع $f(x)=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{720}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6$ منحنی آبی شکل زیر) در نقاط بیشتری با تابع $f(x)=\sin(x)$ تقریباً برابر است.



و به همین ترتیب افزایش تعداد جملات به ۶ جمله، موجب نزدیکتر شدن چندجمله‌ای سری تیلور به تابع $f(x)=\sin(x)$ می‌شود:

$$f(x)=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{720}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6$$

$$+\frac{1}{40320}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^8-\frac{1}{3628800}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{10}$$



با افزایش تعداد جملات، جواب سری تیلور به خود تابع نزدیکتر می‌شود و اگر تعداد جملات سری تیلور بی‌نهایت باشد جواب سری تیلور دقیقاً با خود تابع یکسان خواهد بود. ملاحظه می‌کنید که اگر تعداد جملات سری تیلور محدود باشد سری تیلور در نقاط نزدیک به نقطه‌ای که حول آن بسط داده‌ایم (مثلاً در مثال بالا نقطه $x=\frac{\pi}{2}$) به تابع نزدیکتر است و با دور شدن از آن نقطه، اختلاف مقادیر بدست آمده از سری تیلور و تابع بیشتر می‌شود.

مثال: سری تیلور تابع $f(x)=e^{3x}$ را حول نقطه $x=2$ تا ۴ جمله بیابید. سپس مقدار آن را در $x=2.5$ با مقدار واقعی از تابع اصلی مقایسه کنید.

حل: برای یافتن سری تیلور تابع فوق ابتدا مشتق مرتبه nام آن را می‌یابیم:

$$f(x)=e^{3x}\Rightarrow f'(x)=3e^{3x}\Rightarrow f''(x)=3^2e^{3x}\Rightarrow f'''(x)=3^3e^{3x}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=3^n e^{3x}$$

سپس با توجه به فرمول اصلی سری تیلور میتوانیم فرمول کلی برای سری بنویسیم:

$$e^{3x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n e^{3\times 2}}{n!}(x-2)^n$$

سری به دست آمده، فرمول سری تیلور تابع $f(x)=e^{3x}$ حول نقطه $x=2$ است. با قرار دادن $n=0$ تا $n=3$ چهار جمله اول سری تیلور این تابع را می‌یابیم:

$$e^{3x}=e^6+3e^6(x-2)+\frac{9e^6}{2}(x-2)^2+\frac{9e^6}{2}(x-2)^3+\frac{27e^6}{8}(x-2)^4+\dots$$

حال مقدار این سری را در نقطه $x=2.5$ با مقدار واقعی آن از تابع مقایسه می‌کنیم:

$$P(x)=e^6+3e^6(x-2)+\frac{9e^6}{2}(x-2)^2+\frac{9e^6}{2}(x-2)^3+\frac{27e^6}{8}(x-2)^4$$

$$=e^6+3e^6(2.5-2)+\frac{9e^6}{2}(2.5-2)^2+\frac{9e^6}{2}(2.5-2)^3+\frac{27e^6}{8}(2.5-2)^4$$

$$\to P(2.5)=\frac{563e^6}{128}\simeq 1774.456$$

مقدار واقعی تابع در این نقطه برابر است با:

$$f(2.5)=e^{3\times 2.5}=1808.042$$

که کمتر از ۲ درصد اختلاف را نشان می‌دهد. واضح است که برای کاهش خطا، باید تعداد جملات سری را افزایش دهیم.

تمرین: سری تیلور توابع زیر را حول نقطه داده شده تا ۴ جمله بیابید.

$1) f(x) = Ln(x) \qquad x_0 = 1$

$2) f(x) = \cos(2x) \qquad x_0 = \pi$

$3) f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x_0 = 1$

$4) f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad x_0 = 8$

سری مکلورن (Maclaurin Series):

هرگاه سری تیلور یک تابع حول $x=0$ نوشته شود، آن را سری مکلورن می‌نامیم. پس سری مکلورن حالت خاصی از سری تیلور است.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

مثال: سری مکلورن تابع $f(x)=e^{4x}$ را بیابید.

حل: ابتدا مشتق تابع را در $x=0$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=e^{4x}\to f(0)=e^0=1$$

$$f'(x)=4e^{4x}\to f'(0)=4e^0=4$$

$$f''(x)=4^2e^{4x}\to f''(0)=4^2e^0=4^2$$

.

.

.

$$f^{(n)}(x)=4^ne^{4x}\to f^{(n)}(0)=4^ne^0=4^n$$

پس سری مکلورن این تابع برابر است با:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

$$\Rightarrow e^{4x}=1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3+\frac{32}{3}x^4+\frac{128}{15}x^5+\dots$$

مثال: سری مکلورن تابع $f(x)=\sin(x)$ را بیابید.

حل: ابتدا مشتق تابع را در $x=0$ پیدا می‌کنیم که هر چهار بار تکرار می‌شود:

$$f(x)=\sin(x)\to f(0)=\sin(0)=0$$

$$f'(x)=\cos(x)\to f'(0)=\cos(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin(x)\to f''(0)=-\sin(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos(x)\to f'''(0)=-\cos(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=\sin(x)\to f^{(4)}(0)=\sin(0)=0$$

مشاهده می‌کنید که مشتق چهارم با خود تابع برابر است یعنی این ۴ عدد تکرار می‌شوند.

پس به راحتی می‌توان سری مکلورن این تابع را نوشت:

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\dots$$

$$=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\dots$$

$$\Rightarrow \sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$

مثال: سری مکلورن تابع $f(x)=\cos(x)$ را بیابید.

حل: می‌توان مشابه مثال بالا جواب را یافت ولی راه ساده‌تری نیز وجود دارد. کافیست از سری مکلورن به دست آمده در مثال قبلی مشتق بگیریم:

$$\Rightarrow \sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$

$$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

پس می‌توان از سری مکلورن توابع اصلی برای یافتن سری مکلورن توابع دیگر استفاده کنیم. این توابع عبارتند از:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}\ldots$$

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots$$

$$\sinh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots$$

$$\cosh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots$$

$$\sin^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^{n}(n!)^{2}(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{x^{3}}{6}+\frac{3}{40}x^{5}+\ldots$$

$$\cos^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^{n}(n!)^{2}(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^{3}}{6}-\frac{3}{40}x^{5}-\ldots$$

$$\tan^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}+\ldots$$

مثال: سری مکلورن تابع $f(x)=e^{-3x}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به سری مکلورن تابع $f(x)=e^{x}$ کافیست جایگذاری $x\to -3x$ را انجام دهیم:

$$e^{-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n!}=1-\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}-\frac{27x^3}{3!}+\frac{81x^4}{4!}\ldots$$

مثال: سری مکلورن تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ را به دست آورید.

حل: کافیست از سری مکلورن تابع $f(x)=\tan^{-1}(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم:

$$\tan^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

$$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow}\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=1-x^2+x^4-\ldots$$

نکته۱: به کمک سری مکلورن تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ و جایگذاری $x\to -x^2$ نیز می‌توانستیم به همین جواب برسیم.

نکته۲: اگر برای رسیدن به سری مکلورن یک تابع نیاز به انتگرال‌گیری داشتید، ثابت انتگرال‌گیری را فراموش نکنید و به کمک یک نقطه روی تابع اصلی آن را بیابید.

مثال: سری مکلورن تابع $f(x)=Ln(1+x)$ را به دست آورید.

حل: به کمک سری مکلورن تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ و جایگذاری $x\to -x$ و سپس انتگرال‌گیری از آن میتوانیم به جواب برسیم:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}\ldots$$

$$\xrightarrow{x\to -x}\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{n}=1-x+x^{2}-x^{3}+x^{4}\ldots$$

$$\xrightarrow{\int dx}Ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}\ldots+c$$

برای یافتن c باید یک نقطه روی تابع $f(x)=Ln(1+x)$ مانند $(0,0)$ را در جواب سری مکلورن جایگذاری کنیم:

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}\ldots+c$$

$$\Rightarrow Ln(1+0)=0-\frac{0^{2}}{2}+\frac{0^{3}}{3}-\frac{0^{4}}{4}\ldots+c$$

$$\Rightarrow c=0$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$Ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x\right)^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}...$$

تمرین: سری مکلورن توابع زیر را بیابید:

$1)f\left(x\right)=Ln\left(1+x^{3}\right)$

$2)f\left(x\right)=\cos\left(5x\right)$

$3)f\left(x\right)=e^{x^{2}}$

$4)f\left(x\right)=\sinh\left(3x^{2}\right)$