

تهیه و انتشار:

امین یارمحمدی (مدرس ریاضیات دانشگاهی)

شماره تماس جهت هماهنگی برای کلاس خصوصی: ۰۹۱۲ ۳۸ ۷۲۸ ۳۴

توابع چند متغیره:

توابع تک متغیره به فرم $y = f(x)$ فقط به یک متغیر وابسته بودند مانند $f(x) = -2x^3 + \sin x - 5$. که با مشخص بودن فقط یک متغیر یعنی x می توانستیم مقدار تابع را بیابیم. ولی در توابع دو متغیره $z = f(x, y)$ باید هر دو متغیر x و y مشخص باشند تا مقدار تابع را بیابیم. مانند $f(x, y) = 4x^2 - 3yx + \frac{4x - 1}{\sin(x^4 y^7)}$ و به همین ترتیب در توابع سه متغیره به فرم $w = f(x, y, z)$ برای یافتن مقدار تابع، باید سه متغیر x ، y و z مشخص باشند. در کل برای توابع چند متغیره (Multivariable Functions) باید تمام متغیرها برای یافتن مقدار تابع داده شده باشد که البته در سوالات امتحانی دانشگاهها معمولاً از توابع دو متغیره یا سه متغیره سوال داده می شود که با مطالعه این آموزش و آموزش های بعدی و استفاده از آموزش های تصویری سایت «مسیرفردا» این نوع سوالات که جزو ساده ترین مسائل درس ریاضی عمومی ۲ دانشگاه هستند حل می شوند.

مثال: مقدار توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید.

$$1) f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad x=2$$

$$2) f(x, y) = -2x^2y + y + 3x - 5 \quad (x, y) = (2, -1)$$

$$3) f(x, y, z) = 5xz^2 - 2y + 3z \quad (x, y, z) = (3, 1, -2)$$

حل: این توابع به ترتیب تک متغیره، دو متغیره و چند متغیره هستند.

$$1) f(2) = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 9$$

$$2) f(2, -1) = -2 \times 2^2 \times (-1) - 1 + 3 \times 2 - 5 = 8$$

$$3) f(3, 1, -2) = 5 \times 3 \times (-2)^2 - 2 \times 1 + 3 \times (-2) = 52$$

توابع تک متغیره یک ورودی (مانند x) و یک خروجی (مانند y) دارند. به همین دلیل آنها را به فرم زیر نمایش می‌دهند:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

به همین ترتیب توابع دو متغیره را به فرم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و کلاً توابع n متغیره را به فرم $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ نمایش می‌دهند.

دامنه توابع چند متغیره:

در توابع تک متغیره از چهار قانون زیر برای یافتن دامنه توابع استفاده میشود:

$$1- \text{مخرج کسر نباید صفر باشد. } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow Q(x) \neq 0$$

$$2- \text{زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد. } f(x) = \sqrt[2n]{P(x)} \rightarrow P(x) \geq 0$$

$$3- \text{داخل لگاریتم باید مثبت باشد. } f(x) = \log_{Q(x)}(P(x)) \rightarrow P(x) > 0$$

$$4- \text{پایه لگاریتم باید مثبت و مخالف یک باشد. } f(x) = \log_{Q(x)}(P(x)) \rightarrow P(x) > 0$$

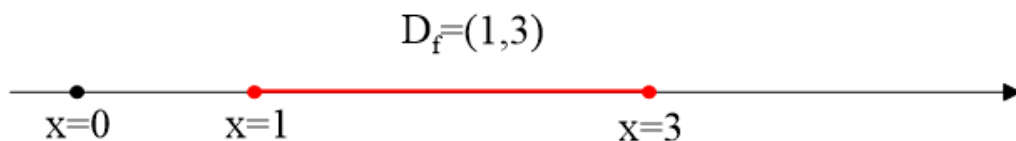
در توابع چند متغیره نیز همین شرایط را برای یافتن ناحیه‌ای از سطح، فضا و... که تابع در آن تعریف شده باشد استفاده می‌کنیم.

دامنه تابع تک متغیره: زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است پس میتوان بر روی یک محور افقی نمایش داد.

مثال:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0$$

$$\rightarrow D_f = (1, 3)$$



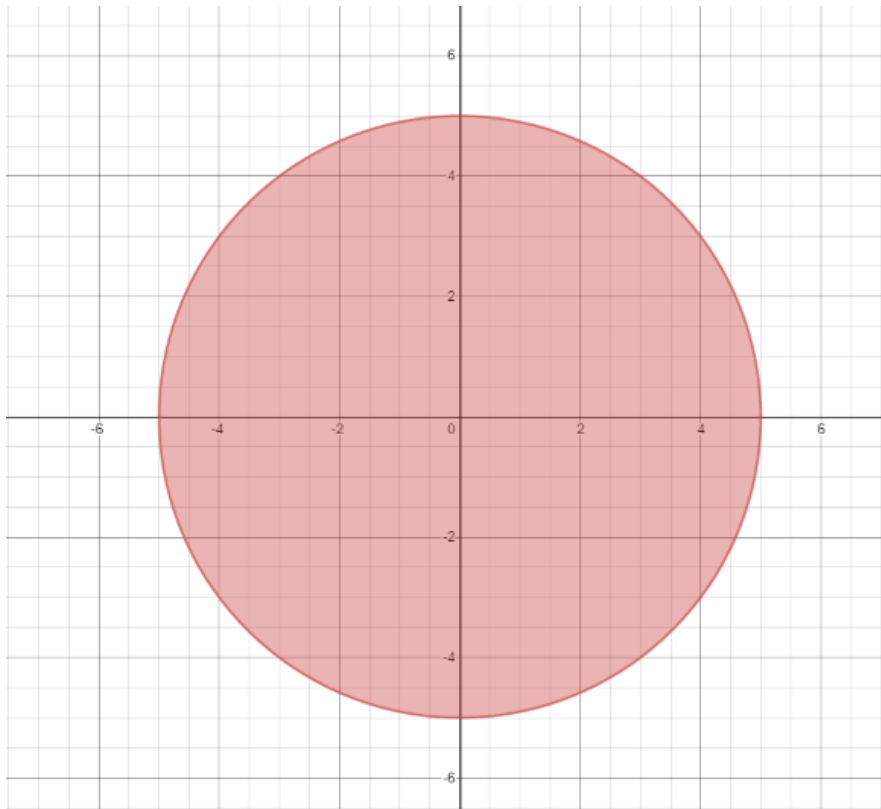
دامنه تابع دو متغیره: مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به صورت (x, y) است که x و y اعداد حقیقی هستند پس میتوان دامنه را بر روی یک صفحه دو بعدی نمایش داد.

مثال:

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \rightarrow 25 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$\rightarrow D_f = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25\}$$

یعنی روی و داخل دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۵:



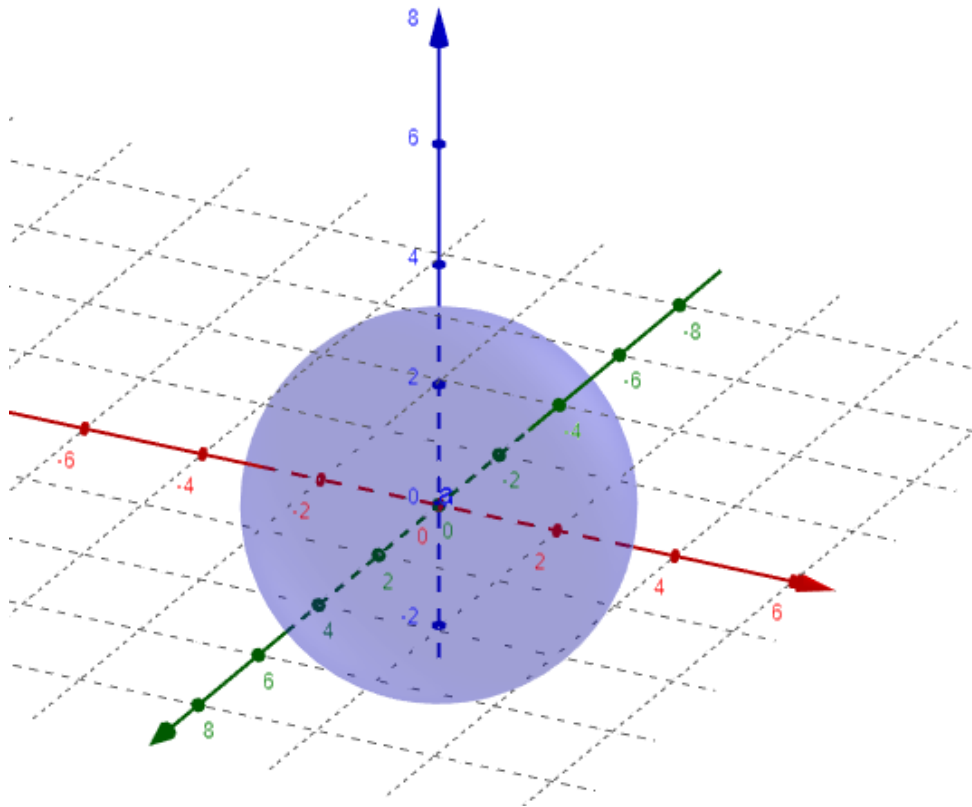
دامنه تابع سه متغیره: مجموعه‌ای از سه‌تایی‌های مرتب به صورت (x, y, z) است که x ، y و z اعداد حقیقی هستند پس میتوان دامنه را در یک فضای سه بعدی نمایش داد.

مثال:

$$f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} \rightarrow 9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$$

$$\rightarrow D_f = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

یعنی روی و داخل کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳:



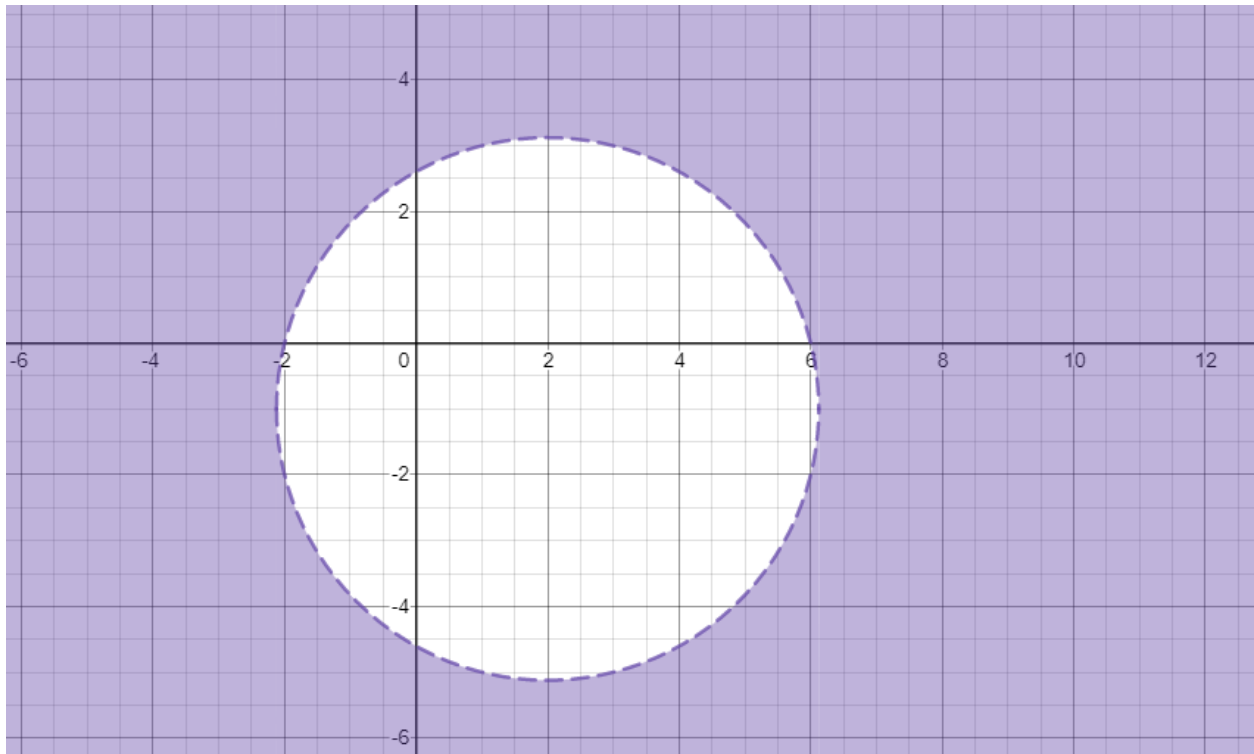
مثال: دامنه تابع $f(x, y) = \frac{4x - y^2 x^3 + 6y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11}}$ را یافته و رسم کنید.

حل: عبارت $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11$ هم زیر رادیکال است که باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد و هم در مخرج است که باید مخالف صفر باشد پس کلاً باید بزرگتر از صفر باشد. یعنی دامنه این تابع عبارت است از:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 11 > 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 > 16$$

یعنی خارج دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و شعاع $R = 4$ که در شکل زیر رسم شده است:

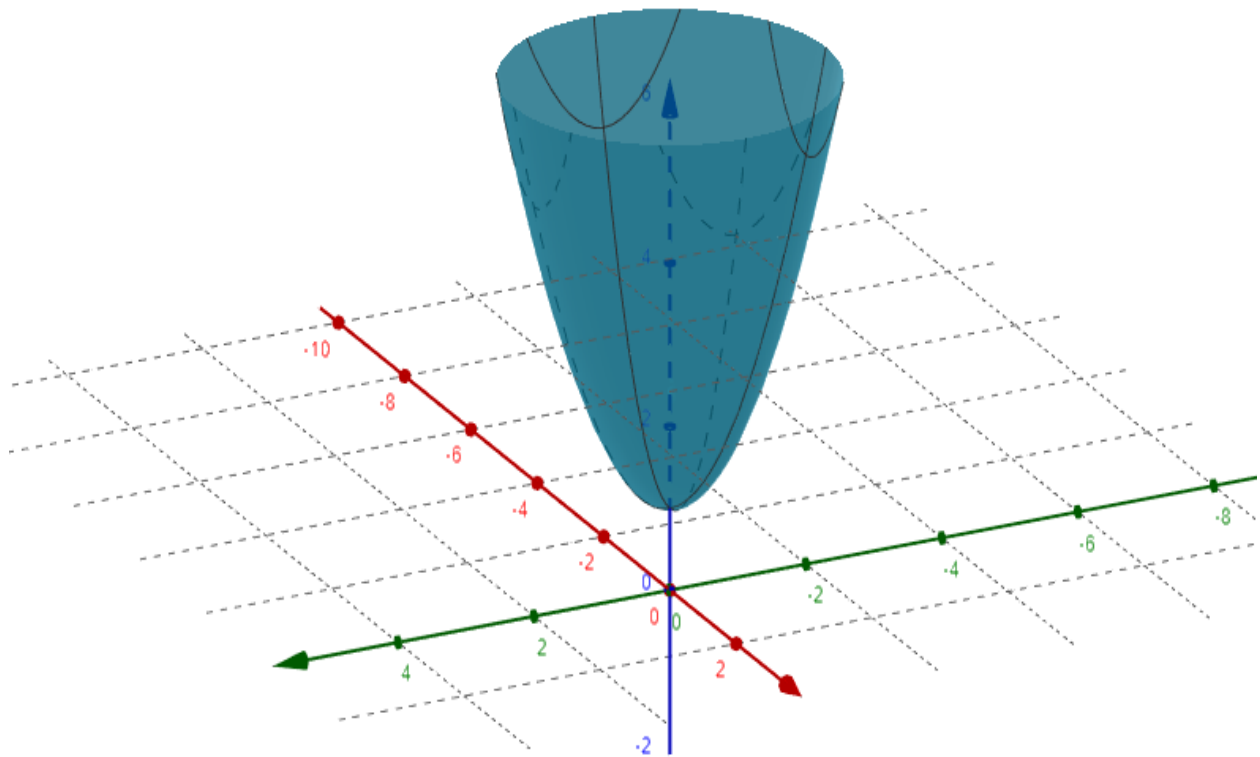


مثال: دامنه تابع $f(x, y, z) = \log(z - x^2 - y^2 - 1)$ را یافته و آن را ترسیم کنید.

حل: عبارت $z - x^2 - y^2 - 1$ داخل لگاریتم قرار دارد پس باید مثبت باشد:

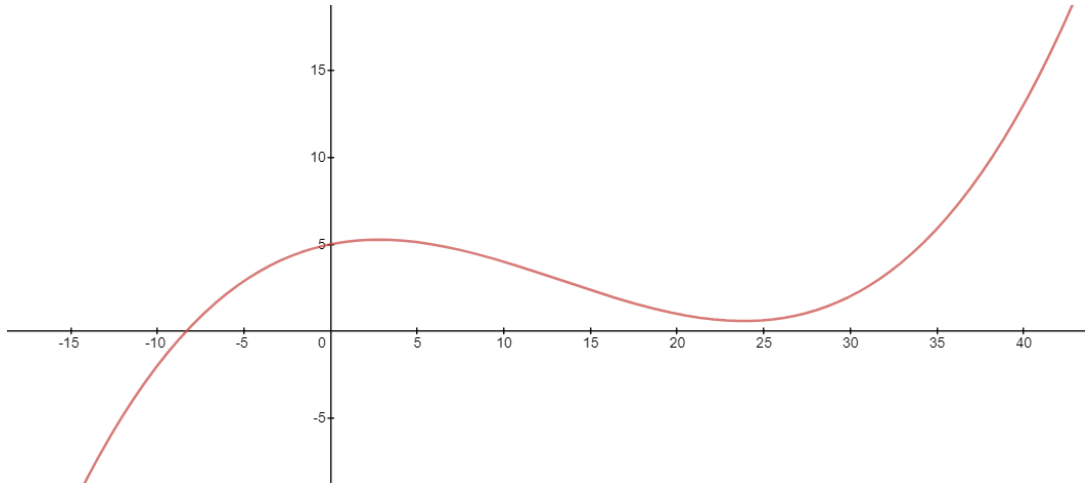
$$z - x^2 - y^2 - 1 > 0 \Rightarrow z > x^2 + y^2 + 1$$

یعنی بالای سهمی گون $z = x^2 + y^2 + 1$ که در شکل زیر نمایش داده شده است:

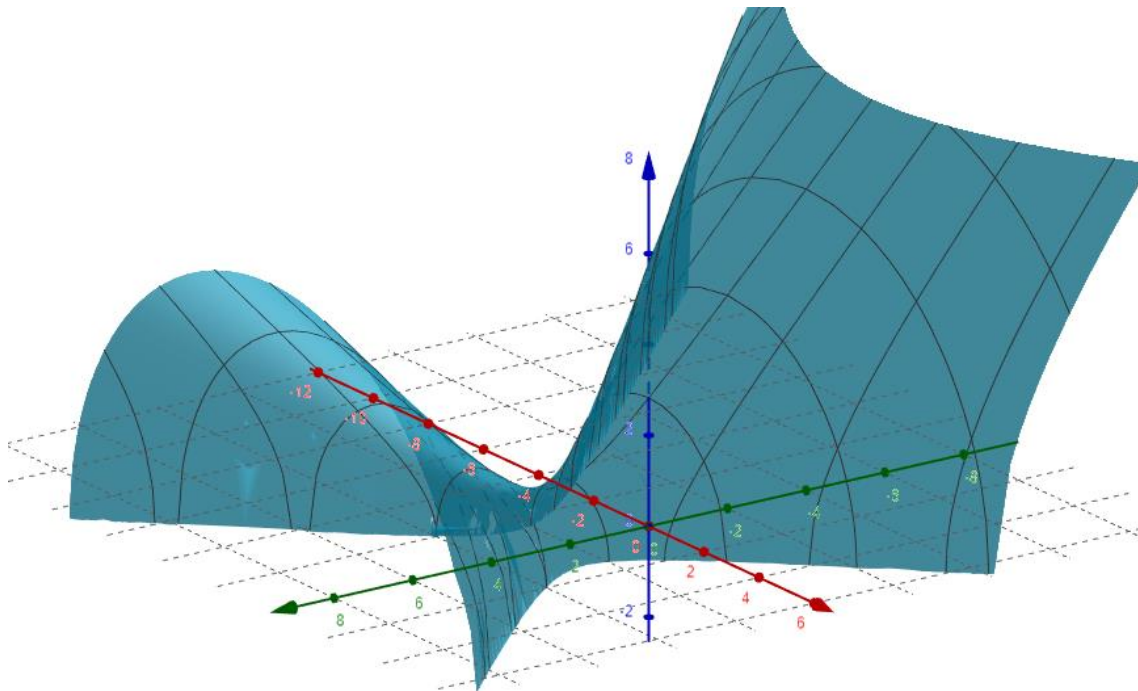


نمایش توابع چند متغیره:

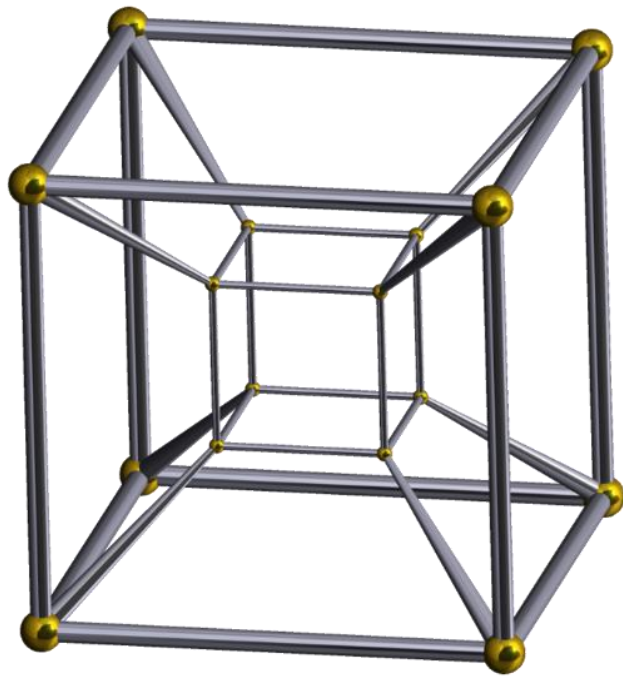
توابع تک متغیره به فرم $y = f(x)$ را می توان در صفحه دو بعدی نمایش داد. محور افقی محور x ها و محور عمودی محور y ها. مانند:



توابع دو متغیره به فرم $z = f(x, y)$ را می توان در فضای سه بعدی نمایش داد. صفحه افقی شامل محور x ها و محور y ها محور عمودی محور z ها. مانند:



توابع سه متغیره به فرم $w = f(x, y, z)$ و توابع با تعداد متغیره‌های بیشتر قابل نمایش در فضای سه بعدی که در آن زندگی می‌کنیم نیستند (افراد عجیبی وجود دارند که ادعا می‌کنند فضای مکانی چهار بعدی و حتی بالاتر! را هم درک می‌کنند!). پس اگر بخواهیم یک تابع را ترسیم کنیم حداکثر باید دو متغیر داشته باشد ولی دامنه توابع سه متغیره (همانطور که بالاتر توضیح داده شد) را نیز در دو بعد می‌توانیم نمایش دهیم ولی خود تابع سه بعدی قابل ترسیم نیست. مثلاً ابرمکعب چهاربعدی تسرکت اگر در فضای سه بعدی رسم میشد چیزی شبیه شکل زیر میشد ولی در تسرکت تمام اضلاع عمود بر هم هستند که در فضای سه بعدی قابل درک نیست.



کاربرد توابع چند متغیره:

زمانی که یک پارامتر به بیش از یک متغیر وابسته باشد میتوان از توابع چند متغیره برای مدلسازی ریاضی استفاده کرد. به طور مثال میزان غلظت یک دارو در بدن انسان به دو پارامتر اصلی وابسته است: دوز داروی دریافتی و زمانی که از دریافت دارو گذشته است. پس یک داروساز باید بتواند تابعی بر حسب میزان داروی دریافتی و زمان دریافت دارو را بیابد که با قرار دادن این دو پارامتر در تابع، میزان غلظت دارو به دست آید. به طور مثال تابع $f(x, y) = e^{x-y}$ میتواند یک تقریب مناسب برای این موضوع باشد که x میزان داروی دریافتی و y زمانی که از دریافت دارو گذشته است. هر چه x بیشتر باشد غلظت دارو در زمانهای ثابت در بدن بیشتر و هر چه y بیشتر شود (زمان بیشتری از دریافت دارو گذشته باشد) غلظت دارو کمتر می شود. یا به عنوان مثال دیگر، اگر فرستنده رادیویی از یک نقطه موج ارسال کند، شدت انرژی موج با معکوس مربع فاصله از فرستنده کم می شود. اگر مبدأ را روی فرستنده قرار دهیم فاصله هر نقطه تا آن برابر با $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ خواهد بود پس انرژی در هر نقطه $P(x, y, z)$ را میتوان با تابع $E = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}$ نمایش داد که k یک عدد ثابت است و به انرژی اولیه وابسته است.