تهیه و انتشار:

امین یارمحمدی (مدرس ریاضیات دانشگاهی)

شماره تماس جهت هماهنگی برای کلاس خصوصی: ۰۹۱۲ ۳۸ ۷۲۸ ۳۴

بررسی همگرایی سری‌ها به کمک آزمون‌ها:

۱) آزمون مقایسه: دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ را در نظر بگیرید. اگر $a_n \leq b_n$ باشد آنگاه داریم:

الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ از $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ کوچکتر است.

ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ از $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بزرگتر است.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n+1}$ را بررسی کنید.

حل: سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ با $|q|=\frac{1}{2}<1$ همگرا است پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n}$ نیز همگراست. حال می‌نویسیم:

$$2^n+1>2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{5}{2^n+1}<\frac{5}{2^n}$$

پس مطابق آزمون مقایسه، با توجه به همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n}$ می‌توان نتیجه گرفت سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n+1}$ نیز همگراست.

تمرین: همگرایی سری‌های زیر را با استفاده از آزمون مقایسه بررسی کنید.

$1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-1}$

$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$

$3)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Ln(n)}$

۲) آزمون مقایسه حد: در این نوع آزمون، حد حاصل تقسیم دو دنباله داخل سری را می‌یابیم و با توجه به جواب حد، دو سری را مقایسه می‌کنیم.

الف) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$ آنگاه دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ هم‌نوع هستند. یعنی اگر یکی همگرا باشد دیگری نیز حتماً همگراست و از واگرایی یکی می‌توان واگرایی سری دیگر را نتیجه گرفت.

ب) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ آنگاه اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز حتماً همگراست زیرا a_n بسیار کوچکتر از b_n است.

ج) اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ آنگاه اگر $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ واگرا باشد $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز حتماً واگراست زیرا a_n بسیار بزرگتر از b_n است.

مثال: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ را بررسی کنید.

حل: دنباله $a_n=\frac{1}{2^n-n}$ را با دنباله $b_n=\frac{1}{2^n}$ به صورت حدی مقایسه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=1>0$$

پس دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ هم‌نوع هستند. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ یک سری هندسی با $|q|=\frac{1}{2}<1$ است پس همگراست. در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ نیز همگراست.

تمرین: همگرایی سری‌های زیر را با استفاده از آزمون مقایسه حد بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+1}$$

$$2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

۳) آزمون دالامبر: در این آزمون برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (با شرط $a_n \geq 0$) حد حاصل تقسیم جمله $n+1$ام دنباله بر جمله nام را یافته و از عدد بدست آمده، همگرایی سری را تشخیص می‌دهیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$

الف) اگر $L>1$ آنگاه سری واگراست.

ب) اگر $L<1$ آنگاه سری همگراست.

ج) اگر $L=1$ آنگاه این آزمون بی‌نتیجه است.

مثال: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$ را بررسی کنید.

حل: دنباله $a_n=\frac{n!}{2^n}$ را در نظر بگیرید. داریم: $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$. حال L را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)!}{2^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2}=\infty>1$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$ واگراست.

تمرین: همگرایی سری‌های زیر را با استفاده از آزمون دالامبر بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(Ln3)^n}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{e^n}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{(2n-1)!}$$

۴) آزمون کوشی: در این آزمون برای سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (با شرط $a_n \geq 0$) حاصل حد ریشه nام a_n را یافته و از عدد بدست آمده، همگرایی سری را تشخیص می‌دهیم.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

الف) اگر $L>1$ آنگاه سری واگراست.

ب) اگر $L<1$ آنگاه سری همگراست.

ج) اگر $L=1$ آنگاه این آزمون بی‌نتیجه است.

مثال: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n}$ را بررسی کنید.

حل: دنباله $a_n = 2^n e^{-n}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{e}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n}$ همگراست.

تمرین: همگرایی سری‌های زیر را با استفاده از آزمون کوشی بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}}{n^n}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{2^{n+3}}$$

۵) آزمون P: در این آزمون برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (با شرط $a_n \geq 0$) حاصل حد زیر را می‌یابیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n . n^p = M \neq 0$$

یعنی باید یک P مناسب بیابیم که حاصل این حد یک عدد غیرصفر (و مخالف بی‌نهایت) شود. سپس با توجه به مقدار P نوع سری را تشخیص می‌دهیم:

الف) اگر $P > 1$ آنگاه سری همگراست.

ب) اگر $P \leq 1$ آنگاه سری واگراست.

مثال: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^3 - 1}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{\sqrt{n}}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n - 1}{n^2 + 2n - 6}$$

حل: برای هر دنباله داخل سری‌ها باید یک P مناسب بیابیم که حاصل این حد یک عدد غیرصفر شود.

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n^3-1}.n^3=\frac{3}{2}$$

پس $P=3>1$ یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n^3-1}$ همگراست.

$$2)\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^{-1}n}{\sqrt{n}}.\sqrt{n}=\frac{\pi}{2}$$

پس $P=\frac{1}{2}\le 1$ یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{\sqrt{n}}$ واگراست.

$$3)\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{n^2+2n-6}.n=5$$

پس $P=1\le 1$ یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{n^2+2n-6}$ واگراست.

۶) آزمون انتگرال: در این آزمون برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (با شرط $a_n \geq 0$) اگر $a_{n+1} < a_n$ باشد آنگاه همگرایی این سری مشابه همگرایی انتگرال $\int_1^{\infty} a(x)dx$ خواهد بود.

مثال: همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ را بررسی کنید.

حل: دنباله داخل سری در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند پس:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$u = e^{-\sqrt{x}} \Rightarrow du = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^{\infty} = -2\left(0 - e^{-1}\right) = \frac{2}{e}$$

این انتگرال جواب دارد پس همگراست در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ نیز همگراست.

تمرین: همگرایی سری‌های زیر را به روش آزمون انتگرال بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ln(n)}{n^2}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$$