تهیه و انتشار:

امین یارمحمدی (مدرس ریاضیات دانشگاهی)

شماره تماس جهت هماهنگی برای کلاس خصوصی: ۰۹۱۲ ۳۸ ۷۲۸ ۳۴

سری:

به مجموع جملات یک دنباله، سری گویند و با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می‌دهند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ مجموع جملات دنباله $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_1^{\infty} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ است:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

اگر تعداد جملات بی‌نهایت نباشد، مجموع n جمله اول سری را حاصل‌جمع جزیی مرتبه nام سری نامیده و با S_n نمایش می‌دهند.

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

مثال: حاصل‌جمع جزیی مرتبه پنجم $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ برابر است با:

$$S_5=\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$$

هرگاه مجموع بی‌نهایت جمله سری یک عدد مشخصی شود سری را همگرا به آن عدد و در غیر اینصورت سری را واگرا گوییم.

مثال: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ همگرا به 1 است زیرا همانطور که جلوتر خواهیم دید این سری یک سری هندسی است و مجموع بی‌نهایت جمله آن 1 است ولی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست زیرا مجموع بی‌نهایت جمله آن بی‌نهایت می‌شود.

اثبات:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}^{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}^{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+$$

$$\overbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}^{>\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}+\overbrace{\frac{1}{17}+\dots+\frac{1}{32}}^{>\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}}+\dots=\frac{1}{2}\times\infty=\infty$$

انواع سری:

۱-سری هندسی: سری $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$ که یک جمله اولیه مانند عدد a داشته و جملات بعدی از ضرب شدن عددی مانند q در جمله قبلی به دست می‌آیند را سری هندسی گوییم. عدد a را جمله اول و q را قدرنسبت می‌نامیم. هر جمله از ضرب شدن قدرنسبت در جمله قبلی به دست می‌آید.

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = 3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+\dots$$

مجموع حاصل‌جمع جزیی n جمله اول سری‌های هندسی (0 تا $n-1$) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$$

اگر $|q|<1$ سری هندسی در بی‌نهایت، همگرا به $\boxed{\frac{a}{1-q}}$ می‌شود زیرا $\lim_{n\to\infty} q^n \overset{|q|<1}{=} 0$.

به زبان ساده‌تر، حاصل سری هندسی برابر است با اولین عدد تقسیم بر یک منهای عددی که به توان n رسیده. (جمله اول تقسیم بر یک منهای قدرنسبت)

مثال: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)$ را بیابید.

حل: می‌توان این سری را به صورت حاصلجمع دو سری هندسی در نظر گرفت

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{1}{4^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{-1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

تمرین: حاصل سری های زیر را بیابید.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{n+1}}{5^n}$

۲-سری تلسکوپی: عبارت داخل سری تلسکوپی از حاصل تفریق یک جمله دنباله از جمله قبلی خود بدست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{k}\left(a_{n+1}-a_n\right)=\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}\right)-\left(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k\right)$$

$$=a_{k+1}-a_0$$

پس نتیجه می‌گیریم حاصل سری تلسکوپی برابر است با:

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{k}\left(a_{n+1}-a_n\right)=a_{k+1}-a_0}$$

مثال: حاصل سری $\sum_{n=1}^{6}\left((n+1)^2-n^2\right)$ را بیابید.

حل:

$$\sum_{n=1}^{4}\left((n+1)^2-n^2\right)=(4+1)^2-1^2=24$$

زیرا:

$$\sum_{n=1}^{4}\left((n+1)^2-n^2\right)=\left(\cancel{2^2}-1^2\right)+\left(\cancel{3^2}-\cancel{2^2}\right)$$

$$+\left(\cancel{4^2}-\cancel{3^2}\right)+\left(5^2-\cancel{4^2}\right)=24$$

که نیازی به محاسبه همه اعداد نیست و باید ابتدا اعداد قرینه را ساده کنیم که در نهایت فقط دو عدد 5^2 و -1^2 باقی می‌ماند.

نکته: هرگاه سری تلسکوپی تا بی‌نهایت باشد باید از حد جمله بزرگتر در بی‌نهایت استفاده کنیم.

مثال: حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ را بیابید.

حل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=-\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{1}\right)=1$$

مثال: حاصل سری $\sum_{n=1}^{10}Log\,\frac{n+3}{n+1}$ را بیابید.

حل:

$$\sum_{n=1}^{10} Log\,\frac{n+3}{n+1}=\sum_{n=1}^{10}\left(Log\,(n+3)-Log\,(n+1)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\left(Log\,(n+3)-Log\,(n+2)+Log\,(n+2)-Log\,(n+1)\right)$$

$$=\left[Log\,(10+3)-Log\,(1+2)\right]+\left[Log\,(10+2)-Log\,(1+1)\right]$$

$$=Log\,\frac{13\times 12}{3\times 2}=Log\,26$$

تمرین: مقدار سری $\sum_{n=6}^{12} Log\,\frac{n-2}{n+1}$ را بیابید.

۳-P سری: سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ را P سری گویند. برای $p>1$ سری همگرا و برای $p\le 1$ سری واگراست. توجه داشته باشد که برای $p=1$ سری به $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تبدیل می‌شود که قبلاً هم ثابت کردیم واگراست. این سری خاص را سری همساز یا هارمونیک گویند.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-3}{n^2}$$

$$3)1+\frac{1}{2\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{4\sqrt[5]{4}}+....$$

حل:

۱) این سری از نوع P سری با $p=3$ است که بزرگتر از یک است پس این سری همگراست.

۲) این سری از جمع دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{3}{n^2}$ تشکیل شده که اولی $p=1$ و دومی $p=2$ است. یعنی اولی واگرا و دومی همگراست که در مجموع سری واگرا می‌شود. (مجموع یک سری واگرا و یک سری همگرا در کل واگرا می‌شود)

۳) این مجموع برابر با سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{6}{5}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{n}}$ است که با $p=\frac{6}{5}$ یک P سری همگراست.

تمرین: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^3}$$

$$3)1+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+....$$

۴-سری متناوب: سری‌هایی که جملات آن به ترتیب و یک در میان مثبت و منفی (یا منفی و مثبت!) باشند را متناوب می‌نامیم. در حالت کلی یک سری متناوب به فرم زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ...$$

سری متناوب به دو شرط زیر همگراست:

$$\begin{cases} 1)\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \\ 2) a_{n+1} < a_n \end{cases}$$

شرط دوم معادل $a'_n < 0$ است.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ را بررسی کنید.

حل:

$$\begin{cases} 1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \\ 2)\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \end{cases}$$

پس این سری همگراست.

تمرین: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^3+1}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Ln(n)}{n}$$